Nguyên lý Cavalieri và Công thức đổi biến

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

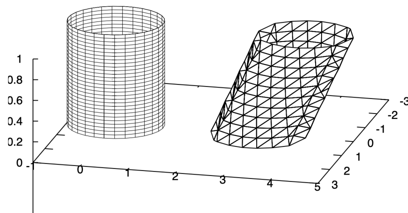
Ngày 06 tháng 11 năm 2025

Ví dụ: (Nguyên lý Cavalieri)

(a) Chứng minh rằng nếu hai khối ba chiều có thể tích, và có một phương sao cho mọi mặt phẳng với phương đó cắt hai khối theo hai mặt cắt có cùng diện tích, thì hai khối đó có cùng thể tích.



Hình: Hai cọc đồng xu có số lượng đồng xu như nhau



Hình: Mặt $x^2 + y^2 = 1$ (trái) và mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$ (phải)

(b) Chứng tỏ rằng thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ *bằng với thể tích của khối bao bởi mặt* $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

(a) Không mất tính tổng quát, giả sử hai khối K_1 và K_2 có thể tích và nằm giữa hai mặt phẳng $z = a$ và $z = b$.

Với một giá trị z nằm giữa a và b, mọi mặt phẳng song song với mặt xy sẽ cắt hai khối K_1 và K_2 tạo ra hai mặt cắt $A_1(z)$ và $A_2(z)$. Theo giả thiết, ta có $|A_1(z)| = |A_2(z)|$. Do đó,

$$V_{K_1} = \int_a^b |A_1(z)| \, \mathrm{d}z = \int_a^b |A_2(z)| \, \mathrm{d}z = V_{K_2}.$$

(b) Ta chọn mặt cắt hai khối vuông góc với trục Oz. Khi đó, mặt cắt của khối hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ tại tọa độ $z = z_0$ với $0 \leq z_0 \leq 1$ có phương trình

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Đây là một hình tròn bán kính 1 nên có diện tích là $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

Tương tự, mặt cắt của khối hình trụ $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$ tại tọa độ $z = z_0$ với $0 \leq z_0 \leq 1$ có phương trình

$$x^2 + (y - z_0 - 3)^2 \leq 1.$$

Đây là một hình tròn bán kính 1 nên có diện tích là $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

Áp dụng Nguyên lý Cavalieri, thể tích của khối nằm bên trong mặt cong $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$, $0 \le z \le 1$ bằng với thể tích của khối nằm bên trong mặt cong $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$.

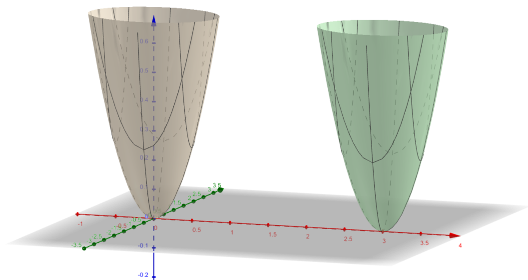
Do đó, nếu đặt $A(z)$ là mặt cắt của hình trụ vuông góc với trục Oz thì ta tìm được thể tích:

$$V = \int_0^1 |A(z)| \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \cdot 1^2 \, \mathrm{d}z = \pi \quad \text{(đơn vị thể tích)}$$

vì $A(z)$ là hình tròn bán kính 1. 

Ví dụ

Hai cái vại có dạng đồ thị của hàm $z = x^2 + y^2$ *và* $z = (x-3)^2 + y^2$*, với* $0 \leq z \leq 1$*. Hãy giải thích vì sao hai cái vại này đựng được cùng một lượng nước (tức là bao hai khối có thể tích bằng nhau), và hãy tính lượng nước đó.*



Với mỗi $0 \leq z \leq 1$ cố định, xét mặt cắt với hai khối $E_1 : z = x^2 + y^2$ và $E_2 : z = (x-3)^2 + y^2$ bởi mặt phẳng vuông góc trục z tại giá trị z đó. Ta lần lượt có các thiết diện $(E_1)_z$ và $(E_2)_z$.

Mặt cắt $(E_1)_z$ gồm những điểm (x, y) thỏa $x^2 + y^2 \leq z$. Đây là hình tròn bán kính $\sqrt{z}$.

Mặt cắt $(E_2)_z$ gồm những điểm (x, y) thỏa $(x-3)^2 + y^2 \leq z$. Đây là hình tròn bán kính $\sqrt{z}$.

Theo nguyên lý Cavaliery, hai mặt cắt bởi cùng mặt phẳng có cùng diện tích nên hai khối có cùng thể tích. Một cách cụ thể, ta có:

$$|E_1| = \int_0^1 |(E_1)_z| \, \mathrm{d}z = \int_0^1 |(E_2)_z| \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{z}\right)^2 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Chương 5: Công thức đổi biến

Nhắc lại: Vi phân trong $\mathbb{R}^n$

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ và x là *điểm trong* của D. Các vectơ tạo thành cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Đạo hàm riêng của $f : D \to \mathbb{R}$ theo biến thứ i tại x được định nghĩa là số thực

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Đây chính là đạo hàm một biến của hàm f khi xem f chỉ là hàm theo biến x_i, là tỉ lệ, hay tốc độ thay đổi của giá trị của hàm so với giá trị của biến thứ i tại điểm x.

Tổng quát hơn, xét hàm $f : D \to \mathbb{R}^m$. Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các thành phần của f tồn tại và liên tục tại x thì ta nói hàm f khả vi liên tục (continuously differentiable) hay trơn (smooth) tại x.

Ma trận các đạo hàm riêng của f tại x được gọi là ma trận Jacobi của f tại x:

$$J_f(x) = Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ: Khi $m = 1$, ma trận Jacobi $J_f(x)$ chính là vectơ gradient

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Nếu có một ánh xạ tuyến tính $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho có một quả cầu $B(x, \epsilon) \subset D$ và một hàm $r : B(x, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h), \quad \forall h \in B(x, \epsilon)$$

và $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, thì ánh xạ $f'(x)$ (còn được ký hiệu $\mathrm{d}f(x)$) được gọi là đạo hàm (Fréchet) của f tại x.

Như vậy, giá trị của hàm có thể được xấp xỉ tuyến tính bằng đạo hàm:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)(h).$$

Điều kiện này cho phép ta kết luận nếu f khả vi tại x thì liên tục tại x.

Nếu f khả vi liên tục tại x, thì ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ có thể được biểu diễn trong cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ bởi ma trận Jacobi $J_f(x)$:

$$f'(x)(h) = J_f(x) \cdot h,$$

trong đó phép nhân $\cdot$ ở vế phải là phép nhân ma trận. Ta cũng có:

$$\det f'(x) = \det J_f(x). \tag{1}$$

Ví dụ

Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì xấp xỉ tuyến tính của f tại x chính là f.

Một cách cụ thể, nếu ánh xạ $f : U \to V$ thỏa

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

với mọi $x, y \in U$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, thì

$$f(x + h) = f(x) + f(h) + 0,$$

nghĩa là $f'(x) = f$. Đạo hàm của f tại x chính là f.

Ví dụ: với $f(x) = 2x$, ta xét $f'(x)h = 2h$. Vì

$$r(h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)h = 2(x + h) - 2x - 2h = 0$$

nên $f'(x) = f = 2$ là đạo hàm của f tại x. 

Cho $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ lần lượt là tập con mở của $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, và $\mathbb{R}^p$. Cho $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ và $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ có đạo hàm. Khi đó, ta có công thức đạo hàm của hàm hợp (Quy tắc móc xích):

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Nếu các hàm là khả vi liên tục thì công thức đạo hàm hàm hợp cho công thức nhân ma trận biểu diễn:

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Trong môn này ta chỉ dùng khái niệm ánh xạ đạo hàm một chút ở phần phép đổi biến tiếp theo. Ta thường thay thế khái niệm này bằng ma trận Jacobi và dùng công thức (1).

Dẫn nhập Công thức đổi biến

Ta tính diện tích của hình tròn tâm O bán kính R bằng cách tính tích phân:

$$I = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = R\sin t$ thì $\mathrm{d}x = R\cos t\,\mathrm{d}t$, và $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = R$ tương ứng $t = \frac{\pi}{2}$. Khi đó, tích phân trở thành:

$$I = 2R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t = 2R^2\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Trong chương này, ta khảo sát phương pháp đổi biến cho tích phân bội. Một cách cụ thể, với tích phân $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$, nếu *đổi biến* $x = \varphi(u)$ thì tích phân sẽ thay đổi như thế nào?

Phép đổi biến

Định nghĩa

Cho A và B là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là một phép vi đồng phôi (diffeomorphism) hay một phép vi phôi, hay một phép đổi biến nếu f là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vi liên tục.

Ví dụ: Phép tịnh tiến trong $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + a$ là một phép đổi biến.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh: *nếu f là một phép vi đồng phôi thì ta có:*

$$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1},$$

với $y = f(x)$.

Thật vậy, đặt $y = f(x)$ và giả sử f là một phép vi đồng phôi trên một tập mở. Như vậy, ta có

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

với mọi x. Lấy đạo hàm hai vế và sử dụng Quy tắc móc xích, ta được

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$

với $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ đồng nhất (nghĩa là $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(h) = h$). Ta cũng có thể viết

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \circ f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}. \tag{*}$$

Tương tự, ta có:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y,$$

nên

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \circ \left(f^{-1}\right)'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$

hoặc ta cũng có thể viết

$$f'(x) \circ \left(f^{-1}\right)'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta kết luận được $\left(f^{-1}\right)'(y)$ là ánh xạ ngược của $f'(x)$, nên

$$J_{f^{-1}}(y) = \left(J_f(x)\right)^{-1}.$$

Điều này có nghĩa rằng ma trận Jacobi của ánh xạ ngược tại y chính là nghịch đảo của ma trận Jacobi của ánh xạ ban đầu tại x. □

Ta đã chứng minh: f là một phép vi đồng phôi $\Rightarrow J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$. Chiều ngược lại thì sao?

Nhắc lại: Định lý hàm ngược (Inverse function theorem)

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ *mở và* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *khả vi liên tục tại* x*. Nếu* $f'(x)$ *khả nghịch thì* x *có một lân cận mà trên đó* f *là một vi đồng phôi.*

Nói cách khác, nếu $\det(J_f(x)) \neq 0$ thì có một lân cận mở $\mathcal{U}$ của x và một lân cận mở $\mathcal{V}$ của $f(x)$ sao cho $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ là song ánh và $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ là khả vi liên tục.

Hệ quả:

Giả sử $\mathcal{U}$ *và* $\mathcal{V}$ *là các tập mở của* $\mathbb{R}^n$*, và* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *là một song ánh khả vi liên tục. Nếu* $\det J_f$ *luôn khác không, thì* f *là một vi đồng phôi.*

Hệ quả này cho thấy ta có thể kiểm tra tính vi đồng phôi mà không cần phải đi tìm đạo hàm của ánh xạ ngược.

Ví dụ

Với $D := \{(x, y) \mid x > 0$ *và* $y > 0\}$, *đặt* $f : D \to \mathbb{R}^2$ *xác định bởi*

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^3, x^2 - y^3\right).$$

Hỏi f *có là một phép vi đồng phôi hay không?*

Ta tính định thức của ma trận Jacobi:

$$\det J_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix} = -6xy^2 - 6xy^2 = -12xy^2 \neq 0$$

với mọi $(x, y) \in D$. Điều này nghĩa là f là vi đồng phôi trên D.

Hỏi: Nếu $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ (nửa trên mặt phẳng Oxy), thì f có phải là vi đồng phôi không?

Không, vì f *không là song ánh, tức là* $f(x, y) = f(-x, y)$.

Công thức đổi biến cho vi phân và tích phân

Định lý (Công thức đổi biến)

Công thức đổi biến

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|\det \varphi'|$$

được thỏa dưới những giả thiết: A là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một phép đổi biến từ A lên $\varphi(A)$, A và $\varphi(A)$ có thể tích, f và $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ khả tích.

Cách nhớ như trong trường hợp một chiều

Đặt $x = \varphi(u)$, thì

$$\mathrm{d}x = |\det \varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Nếu

$$x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{U}$$

thì

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u))|\det \varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Để tính toán, ta nhớ rằng:

$$\det \varphi' = \det J_\varphi.$$

Nếu viết $x = x(u)$ và $\frac{\partial x}{\partial u} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$ thì có thể viết một cách hình thức:

$$\mathrm{d}x = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

Dấu giá trị tuyệt đối có thể bỏ đi nếu ta biết dấu của $\det \varphi'$.

- Nếu $\det \varphi'$ luôn dương thì φ được gọi là một phép đổi biến bảo toàn định hướng.
- Nếu $\det \varphi'$ luôn âm thì φ được gọi là một phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Trong trường hợp một chiều, đổi biến có thể được dùng để làm cho hàm dưới dấu tích phân đơn giản hơn. Trong trường hợp nhiều chiều, đổi biến hay được dùng để làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ

- Trong $\mathbb{R}$, đặt $x = \varphi(t) = \sin(t)$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì $-1 < x < 1$.

Khi đó, ta có $\varphi'(t) = \cos t > 0$, nên φ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng.

- Trong $\mathbb{R}^2$, đặt $(x, y) = \varphi(r, t) = (r\cos t, r\sin t)$ với $r > 0$ và $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, ta có

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r > 0,$$

nên φ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng. 

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^2$, đặt $(x, y) = \varphi(r, t) = (r\sin t, r\cos t)$ với $r > 0$ và $t \in (0, 2\pi)$.

Khi đó, ta có

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin t & r\cos t \\ \cos t & -r\sin t \end{pmatrix} = -r\sin^2 t - r\cos^2 t = -r < 0,$$

nên φ là một phép đổi biến đảo ngược định hướng. $\square$

Ví dụ: Đổi biến một chiều

Cho $x = \varphi(t)$ với $a \leq t \leq b$, hàm φ liên tục và $\varphi : (a, b) \to \varphi((a, b))$ là một vi đồng phôi.

Cho f khả tích trên $\varphi([a, b])$. Theo công thức đổi biến, ta có:

$$\int_{\varphi((a,b))} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Do φ là một vi đồng phôi nên là song ánh. Do đó, $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t \in (a, b)$, nên

$$\varphi'(t) > 0,\ \forall t \in (a, b) \quad \text{hoặc} \quad \varphi'(t) < 0,\ \forall t \in (a, b).$$

Vì vậy, φ là hàm tăng hoặc giảm trên $[a, b]$.

Nếu $\varphi' > 0$, tức là hàm tăng, thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$.

Vì thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân, nên ta có thể chuyển đổi tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng. Ta có:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{[a,b]} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{(\varphi(a),\varphi(b))} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nếu $\varphi' < 0$, tức là hàm giảm, thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ và

$$|\varphi'(t)| = -\varphi'(t).$$

Tích phân trở thành

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{(\varphi(b),\varphi(a))} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có công thức đổi biến trong $\mathbb{R}$ là:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Đổi biến hai chiều

Với phép đổi biến $(u, v) \mapsto (x, y)$ người ta thường dùng ký hiệu

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Nếu phép đổi biến $(u, v) \mapsto (x, y)$ mang tập A thành tập B thì

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Như vậy, ta có thể viết

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Vì $J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$ với $y = f(x)$, nên

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

Các bước viết công thức đổi biến

1. Đổi biến
$$x = \varphi(u).$$

2. Đổi miền lấy tích phân
$$x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{U}.$$

3. Đổi dạng vi phân
$$\mathrm{d}x = |\det J_\varphi(u)| \; \mathrm{d}u.$$

4. Thế vào tích phân
$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u)) \; |\det J_\varphi(u)| \; \mathrm{d}u.$$

Ví dụ

Tính tích phân $\iint_R (x-3y)\,\mathrm{d}A$*, trong đó* R *là hình tam giác có tọa độ đỉnh* $(0,0)$*,* $(2,1)$*, và* $(1,2)$ *bằng cách sử dụng phép đổi biến* $x = 2u + v$ *và* $y = u + 2v$*.*

Phương trình đường thẳng đi qua $(0,0)$ và $(2,1)$ là $2x - y = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua $(0,0)$ và $(1,2)$ là $x - 2y = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua $(1,2)$ và $(2,1)$ là $x + y = 3$.

Phép đổi biến $x = 2u + v$ và $y = u + 2v$ biến miền R thành miền D bị chặn bởi:

$$2x - y = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$
$$x - 2y = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$
$$x + y = 3 \Leftrightarrow u + v = 1,$$

nghĩa là

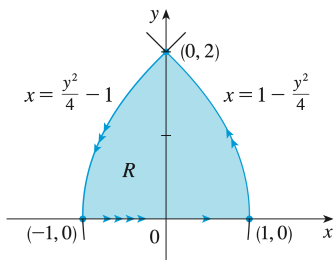
$$D = \{(u,v) \mid 0 \le v \le 1, 0 \le u \le 1 - v\}.$$

Vì $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, nên tích phân đã cho là:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y)\,\mathrm{d}A &= \iint_D (-u - 5v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-v} (-u - 5v)\cdot 3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -3.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ



Sử dụng phép đổi biến

$$x = u^2 - v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv$$

để tính tích phân

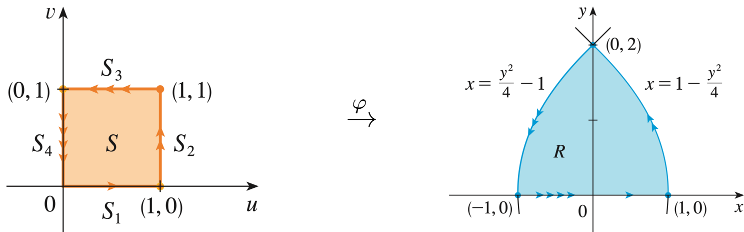
$$\iint_R y \, \mathrm{d}A,$$

với R là miền được bao bởi trục x và parabola $y^2 = 4 - 4x, \quad y^2 = 4 + 4x, \quad y \geq 0.$

- Nếu không sử dụng phép đổi biến, thì ta tính tích phân:

$$\iint\limits_R y \, \mathrm{d}A = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{1-\frac{y^2}{4}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(2y - \frac{y^3}{2}\right) \mathrm{d}y = 2.$$

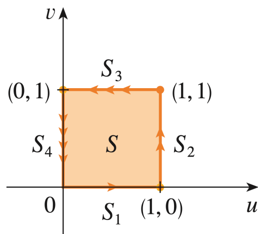
• Khi sử dụng phép đổi biến $x = u^2 - v^2$ và $y = 2uv$, trước hết ta chứng minh rằng hình vuông $S = [0, 1] \times [0, 1]$ trở thành miền R dưới phép đổi biến φ, nghĩa là $R = \varphi(S)$.



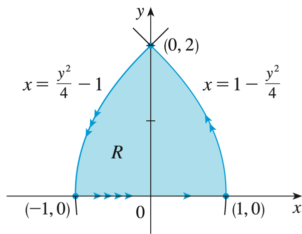
Thật vậy, ta thấy $\varphi(\partial S) = \partial R$. Một cách cụ thể, trên cạnh S_1 với $v = 0$ và $0 \leq u \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = u^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 0.$$

Vì $0 \leq x \leq 1$, nên $\varphi(S_1)$ trở thành trục x với $0 \leq x \leq 1$.



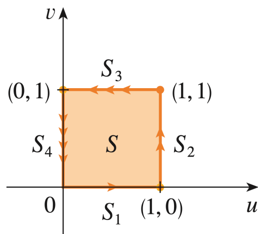
$\xrightarrow{\varphi}$



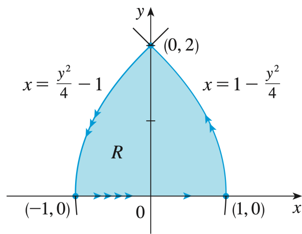
Trên cạnh S_2 với $u = 1$ và $0 \leq v \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = 1 - v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 2v.$$

Thay $v = \frac{y}{2}$ vào phương trình của x, ta được $x = 1 - \frac{y^2}{4}$. Do đó, $\varphi(S_2)$ trở thành đường $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ với $0 \leq x \leq 1$.



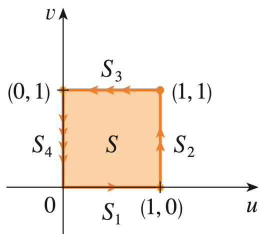
$\overset{\varphi}{\longrightarrow}$



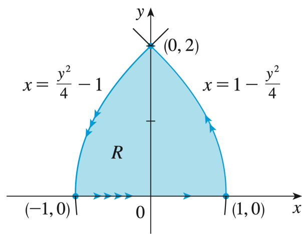
Trên cạnh S_3 với $v = 1$ và $0 \leq u \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = u^2 - 1 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 2u.$$

Thay $u = \frac{y}{2}$ vào phương trình của x, ta được $x = \frac{y^2}{4} - 1$. Do đó, $\varphi(S_3)$ trở thành đường $x = \frac{y^2}{4} - 1$ với $-1 \leq x \leq 0$.



$$\xrightarrow{\varphi}$$



Trên cạnh S_4 với $u = 0$ và $0 \leq v \leq 1$ thì

$$x = u^2 - v^2 = -v^2 \qquad \text{và} \qquad y = 2uv = 0.$$

Vì $0 \leq v \leq 1$, nên $\varphi(S_4)$ trở thành trục x với $-1 \leq x \leq 0$.

Tiếp theo, ta tính ma trận Jacobi:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

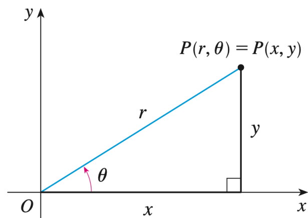
nếu $u \neq 0$ và $v \neq 0$. Điều này cho thấy φ là một phép đổi biến.

Tích phân đã cho là:

$$\begin{aligned} \iint\limits_R y \, \mathrm{d}A &= \iint\limits_S 2uv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, \mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2uv(4u^2 + 4v^2) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= 2. \end{aligned}$$



Nhắc lại: Tọa độ cực (polar coordinate system)



Một điểm $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực (r, θ), với

- r là khoảng cách từ O tới P; và
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ là góc từ vectơ $\langle 1, 0 \rangle$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$.

Do đó, $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tuy nhiên, tại một điểm trên tia Ox thì $\theta = 0$ hay $\theta = 2\pi$. Mặt khác, tại gốc tọa độ O thì $r = 0$ còn θ có thể là bất kỳ giá trị nào.

Do đó, $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ không là song ánh và không liên tục trên Ox.

Ta hạn chế miền xác định là $\mathbb{R}^2$ bỏ đi tia Ox. Khi đó, ánh xạ ngược từ tọa độ cực sang tọa độ Euclid là:

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0)\,|\,x\geq 0\}\\ (r,\theta) &\mapsto (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

Ta cũng có mối liên hệ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ và $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

Phương trình trong tọa độ cực (polar curves)

Đồ thị của một hàm được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = f(\theta)$, hoặc một cách tổng quát $F(r, \theta) = 0$, gồm tất cả các điểm $P(r_P, \theta_P)$ sao cho $F(r_P, \theta_P) = 0$.

Ví dụ: Phương trình trong tọa độ cực $r = 2$ chính là phương trình của đường tròn tâm O, bán kính 2.

Ví dụ: Cho phương trình trong tọa độ cực $r = 2\cos\theta$. Vẽ đồ thị của đường cong và tìm phương trình trong hệ tọa độ Cartesian xy.

Nhân hai vế cho r để thu được:

$$r^2 = 2r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Đây là phương trình đường tròn tâm $(1, 0)$, bán kính 1.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	-1
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$
π	-2

